Обобщенный метод минимальных невязок - GMRES

Решаем систему линейных алгебраических уравнений

 (1)

Приближенное решение будем искать в виде суммы

, (2)

где  - нулевое приближение, - подпространство Крылова

, (3)

 - невязка начального приближения.

Алгоритм GMRES определяет таким образом, что евклидова норма невязки является минимальной, то есть минимизирует

. (4)

Рассмотрим основные этапы алгоритма.

1. Построение ортонормированного базиса 

Будем использовать процедуру ортогонализации Арнольди записанную псевдокодом

; 







; 



; 



Двойной цикл кода соответствует формуле

.

Векторы образуют ортонормированный базис , - элементы верхней матрицы Хессенберга  с нулевыми элементами ниже первой поддиагонали. Матрица  расширена за счет элемента  в дополнительной  строке и будет использоваться при минимизации невязки (4)

. (5)

1. Минимизация невязки

Коррекцияначального приближения  ищется в виде

. (6)

Коэффициенты разложения  образуют вектор

 (7)

Можно показать, что

 (8)

где  (9)

- матрица столбцов .

Введем вектор  размерностью 

 (10)

Поскольку  то .

Следовательно, норму невязки (4) с учетом (8) можно записать в виде

 (11) Поскольку в (11)  ортогональная матрица, она не меняет длину вектора.

Задачу минимизации невязки теперь можно упростить

 (12)

и решить с помощью  факторизации.

1.  алгоритм

Найдем разложение матрицы 

 где  (13)

с помощью вращений Гивенса

 (14)

Здесь - единичная матрица размерностью ,  ипредставляют угла вращения в плоскости .

Матрица  имеет размерность , является верхней треугольной с последней нулевой строкой.Так как , то для нормы (12) имеем

 (15)

где  . (16)

Так как последняя строка  нулевая, то вектор  в  строке имеет элемент .

Введем обозначение для первых компонент

 (17)

Тогда (15) будет иметь вид

 (18)

Если мы выберем  так, чтобы , то для задачи минимизации (12) получим

 (19)

Компоненты  находим из системы

 . (20)

Затем находим  из (6) и решение (2) задачи (1).

*Замечание*. Для оценки погрешности можно использовать , поскольку

 (21)

1. *Сходимость* GMRES

Скорость сходимости зависит от свойств матрицы .

Если , то

. (22)

В частности, если , то

 (23)

В общем случае имеет место оценка

 (24)

где  - множество полиномов степени не выше  таких, что ,  - матрица из спектрального разложения ,  - спектр матрицы .